Mathématiques *Terminale*

Plans et distance minimale

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, on considère :

- le plan $\mathcal{P}_1$ dont une équation cartésienne est $2x + y - z + 2 = 0$,
- le plan $\mathcal{P}_2$ passant par le point $B(1\,;\,1\,;\,2)$ et dont un vecteur normal est $\vec{n_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.

a. Donner les coordonnées d'un vecteur $\vec{n_1}$ normal au plan $\mathcal{P}_1$.

b. On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si un vecteur normal à l'un des plans est orthogonal à un vecteur normal à l'autre plan.

Montrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.

2.

a. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_2$.

b. On note Δ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 + t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Montrer que la droite Δ est l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

On considère le point $A(1\,;\,1\,;\,1)$ et on admet que le point A n'appartient ni à $\mathcal{P}_1$ ni à $\mathcal{P}_2$.

On note H le projeté orthogonal du point A sur la droite Δ.

3. On rappelle que, d'après la question 2. b, la droite Δ est l'ensemble des points M_t de coordonnées $(0\,;\,-2 + t\,;\,t)$, où t désigne un nombre réel quelconque.

a. Montrer que, pour tout réel t, $AM_t = \sqrt{2t^2 - 8t + 11}$.

b. En déduire que $AH = \sqrt{3}$.

4. On note $\mathcal{D}_1$ la droite orthogonale au plan $\mathcal{P}_1$ passant par le point A et H_1 le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}_1$.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}_1$.

b. En déduire que le point H_1 a pour coordonnées $\left(\frac{-1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{5}{3}\right)$.