Mathématiques *Terminale*

Suites d'intégrales Expo

Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\pi} e^{-nx} \sin(x)\, dx, \qquad J_n = \int_0^{\pi} e^{-nx} \cos(x)\, dx.$$

1. Calculer I_0.

2.

a. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $I_n \geq 0$.
b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $I_{n+1} - I_n < 0$.
c. Déduire des deux questions précédentes que la suite (I_n) converge.

3.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$I_n \leq \int_0^{\pi} e^{-nx}\, dx.$$

b. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\int_0^{\pi} e^{-nx}\, dx = \frac{1 - e^{-n\pi}}{n}.$$

c. Déduire des deux questions précédentes la limite de la suite (I_n).

4.

a. En intégrant par parties l'intégrale I_n de deux façons différentes, établir les deux relations suivantes, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$I_n = 1 + e^{-n\pi} - nJ_n \qquad \text{et} \qquad I_n = \frac{1}{n} J_n.$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$I_n = \frac{1 + e^{-n\pi}}{n^2 + 1}$$

5. On souhaite obtenir le rang n à partir duquel la suite (I_n) devient inférieure à 0,1.
Recopier et compléter la cinquième ligne du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

```
1    from math import *
2    def seuil() :
3        n = 0
4        I = 2
5        ...
6            n = n+1
7            I = (1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
8        return n
```

Instinct Réussite
Préparation Académique
59 000 Lille