Mathématiques *Terminale*

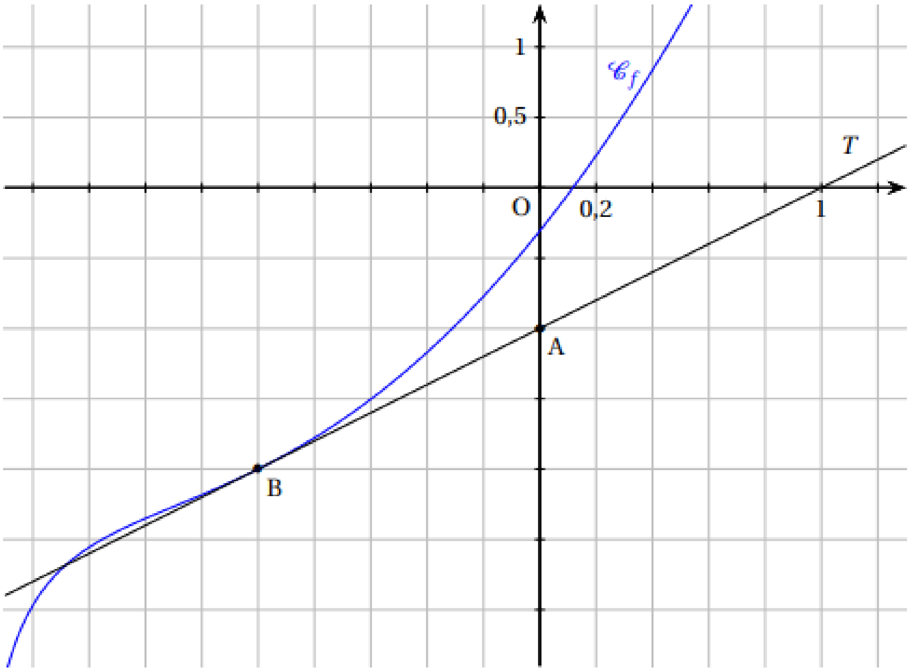
Logarithme Graph et distance

EXERCICE 3 **6 points**

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]-2\,;+\infty[$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan, f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ et sa tangente T au point B d'abscisse -1.

On précise que la droite T passe par le point $A(0\,;\,-1)$.



Partie A : exploitation du graphique

À l'aide du graphique, répondre aux questions ci-dessous.

1. Préciser $f(-1)$ et $f'(-1)$.

2. La fonction f est-elle convexe sur son ensemble de définition ? Justifier.

3. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et donner une valeur arrondie à 10^{-1} près d'une solution.

Partie B : étude de la fonction f

On considère que la fonction f est définie sur $]-2\,;+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 + ln(x + 2)$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Déterminer par le calcul la limite de la fonction f en -2. Interpréter graphiquement ce résultat.

On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Montrer que pour tout $x > -2$, $f'(x) = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x + 2}$.

3. Étudier les variations de la fonction f sur $]-2\,;+\infty[$ puis dresser son tableau de variations complet.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-2\,;+\infty[$ et donner une valeur arrondie de α à 10^{-2} près.

5. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-2\,;+\infty[$.

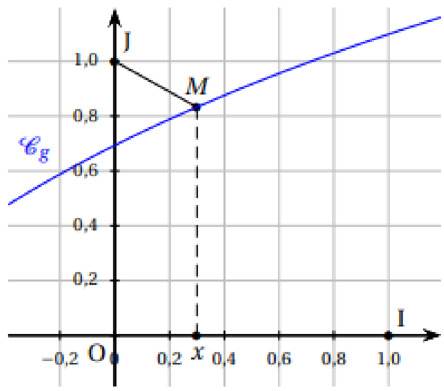
6. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion et déterminer son abscisse.

Partie C : une distance minimale

Soit g la fonction définie sur $]-2\,;+\infty[$ par

$$g(x) = ln(x + 2)$$

On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, représentée ci-contre.



Soit M un point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x.

Le but de cette partie est de déterminer pour quelle valeur de x la distance JM est minimale.

On considère la fonction h définie sur $]-2\,;+\infty[$ par $h(x) = JM^2$.

1. Justifier que pour tout $x > -2$, on a : $h(x) = x^2 + [ln(x + 2) - 1]^2$.

2. On admet que la fonction h est dérivable sur $]-2\,;+\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.

On admet également que pour tout réel $x > -2$,

$$h'(x) = \frac{2f(x)}{x + 2}$$

où f est la fonction étudiée en partie B.

a. Dresser le tableau de variations de h sur $]-2\,;+\infty[$. Les limites ne sont pas demandées.

b. En déduire que la valeur de x pour laquelle la distance JM est minimale est α où α est le nombre réel défini à la question 4 de la partie B.

3. On notera M_α le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse α.

a. Montrer que $ln(\alpha + 2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$.

b. En déduire que la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point M_α et la droite (JM_α) sont perpendiculaires.

On pourra utiliser le fait que, dans un repère orthonormé, deux droites sont perpendiculaires lorsque le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.