Mathématiques

Terminale

Approximation ln(2) par suite convergente

Un des objectifs de cet exercice est de déterminer une approximation du nombre réel $ln(2)$, en utilisant une des méthodes du mathématicien anglais Henry Briggs au XVI[e] *siècle.*
On désigne par (u_n) la suite définie par :
$u_0 = 2$ *et, pour tout entier naturel n,* $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

Partie A

1. ***a.*** *Donner la valeur exacte de u_1 et de u_2.*
b. *Émettre une conjecture, à l'aide de la calculatrice, sur le sens de variation et la limite éventuelle de la suite.*

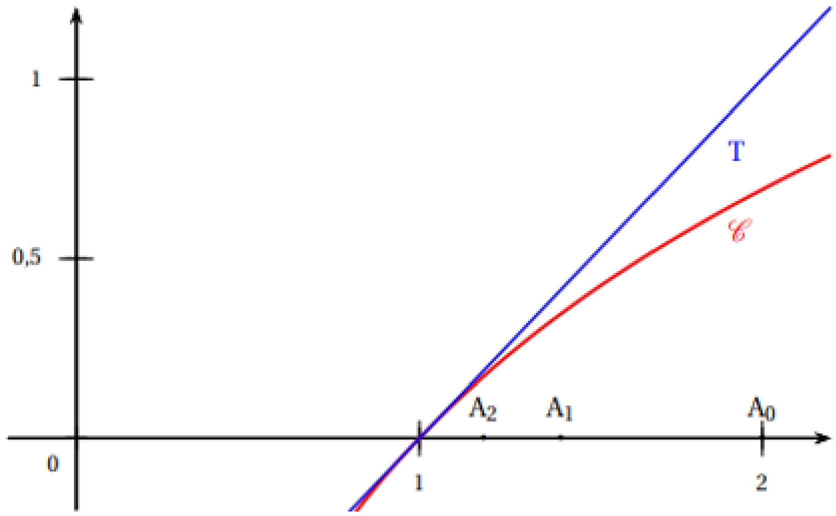
2. ***a.*** *Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.*
b. *En déduire que la suite (u_n) est convergente.*
c. *Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ l'équation $\sqrt{x} = x$.*
d. *Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n).*

Partie B

On désigne par (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = ln(u_n)$.

1. ***a.*** *Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.*
b. *Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.*
c. *En déduire que, pour tout entier naturel n, $ln(2) = 2^n ln(u_n)$.*

2. *On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction ln et la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.*
Une équation de la droite T est $y = x - 1$.
Les points A_0, A_1, A_2 ont pour abscisses respectives u_0, u_1 et u_2 et pour ordonnée 0.



On décide de prendre $x - 1$ comme approximation de $ln(x)$ lorsque x appartient à l'intervalle $]0{,}99\,;\,1{,}01[$.

a. Déterminer à l'aide de la calculatrice le plus petit entier naturel k tel que u_k appartienne à l'intervalle $]0{,}99\,;\,1{,}01[$ et donner une valeur approchée de u_k à 10^{-5} près.

b. En déduire une approximation de $ln(u_k)$.

c. Déduire des questions **1. c.** et **2. b.** de la **partie B** une approximation de $ln(2)$.

3. On généralise la méthode précédente à tout réel a strictement supérieur à 1.
Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin que l'appel $Briggs(a)$ renvoie une approximation de $ln(a)$.
On rappelle que l'instruction en langage Python $sqrt(a)$ correspond à $\sqrt{a}$.

```
from math import*
def Briggs(a):
    n = 0
    while a >= 1.01:
        a = sqrt(a)
        n = n+1
    L = ...
return L
```

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.