# Mathématiques *Terminale*

## *Convergence supérieure*

Le but de cet exercice est d'étudier les convergences de deux suites vers une même limite.

**Partie A**

On considère la fonction $f$ définie sur [2 ; +∞[ par

$$f(x) = \sqrt{3x - 2}.$$

**1.** Justifier les éléments du tableau de variations ci-dessous :

| $x$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $2$ ↗ | $+\infty$ |

On admet que la suite $(u_n)$ vérifiant $u_0 = 6$ et, pour tout $n$ entier naturel, $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie.

**2.** a. Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel :

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6.$$

b. En déduire que la suite $(u_n)$ converge.

**3.** On appelle $\ell$ la limite de $(u_n)$.

On admet qu'elle est solution de l'équation f(x)=x. Déterminer la valeur de $\ell$.

**4.** On considère la fonction rang écrite ci-dessous en langage Python.

On rappelle que sqrt(x) renvoie la racine carrée du nombre x.

```
from math import *

def rang(a) :
    u = 6
    n=0
    while u >= a :
        u = sqrt(3*u - 2)
        n = n+1
    return n
```

a. Pourquoi peut-on affirmer que rang(2.000001) renvoie une valeur ?

b. Pour quelles valeurs du paramètre a l'instruction rang(a) renvoie-t-elle un résultat ?

**Partie B**

On admet que la suite $v_n$ vérifiant $v_0 = 6$ et, pour tout $n$, entier naturel, $v_{n+1} = 3 - \frac{2}{v_n}$ est bien définie.

**1.** Calculer $v_1$.

**2.** Pour tout $n$ entier naturel, on admet que $v_n \neq 2$ et on pose :

$$w_n = \frac{v_n - 1}{v_n - 2}$$

a. Démontrer que la suite $(w_n)$ est géométrique de raison 2 et préciser son premier terme $w_0$.

b. On admet que, pour tout n entier naturel,

$$w_n - 1 = \frac{1}{v_n - 2}.$$

En déduire que, pour tout n entier naturel,

$$v_n = 2 + \frac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1}.$$

c. Calculer la limite de $(v_n)$.

**3.** Déterminer le plus petit entier naturel $n$ pour lequel $v_n < 2{,}01$ en résolvant l'inéquation.